Géométrie dans l'espace

Axiomes

1

Considérons les quatre *axiomes* de géométrie plane suivants (le *plan* étant l'ensemble de tous les points et une *droite* étant un ensemble de points particulier) :

A1 Le *plan* contient au moins deux *points* distincts. (Il existe au moins deux points.)

A2 Toute *droite* contient une infinité de *points*.

A3 Par deux *points* distincts, il passe une *droite* et une seule (contenue dans le plan, donc).

A4 Le *plan* n'est pas une *droite*.

À partir de ces <u>seuls</u> *axiomes*, *démontrer* les *théorèmes* suivants :

a) Le plan contient au moins une droite.
b) Le plan contient au moins deux droites.
c) Le plan contient au moins trois droites.
d) Le plan contient au moins quatre droites.

2

Démontrer les théorèmes du cours dont la démonstration n'est pas déjà donnée dans la version longue. C'est-à-dire tous les théorèmes sauf les 7, 8 et 9.

Parallélisme

3

Démontrer que : deux plans étant parallèles, tout plan coupant l'un coupe l'autre.

4

Démontrer que : par un point donné, il passe un (unique) plan parallèle à un plan donné.

5

a) Démontrer que : deux droites étant parallèles, tout plan coupant l'une coupe l'autre (ou tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre).
b) Déduire du a) que : une droite d étant parallèle à un plan P, toute parallèle à d passant par un point de P est incluse dans P.
c) Déduire du b) que : si une droite est parallèle à deux plans sécants entre eux, elle est parallèle à leur intersection.
d) Déduire du a) que : deux plans étant parallèles, toute droite coupant l'un coupe l'autre (ou tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre).

6

Vrai ou faux ? (*Aucune démonstration n'est demandée.*)

a) Par un point donné, il passe une unique droite parallèle à un plan donné.
b) Par un point donné, il passe un unique plan parallèle à une droite donnée.
c) Une droite parallèle à un plan est parallèle à toute droite de ce plan.
d) Deux droites contenues respectivement dans deux plans parallèles sont parallèles entre elles.
e) Deux plans sont parallèles <u>ssi</u> l'un contient deux droites parallèles entre elles (et distinctes) et toutes deux parallèles à l'autre plan.

7

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Soient B', C' et D' les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.

Démontrer que le plan $(B'C'D')$ est parallèle au plan (BCD).

Intersections

Dans les exercices de ce chapitre, lorsqu'il est dit qu'un point appartient à une arête, il est sous-entendu qu'il est distinct de ses extrémités. De même, lorsqu'on demande de choisir un point sur une surface, il est entendu qu'il n'est pas choisi sur sa frontière.

8

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle.

Soit I un point du segment $[DC]$.

Soit J le point d'intersection de $[FC]$ et de $[BG]$.

a) Démontrer que les points E, D, C et F sont coplanaires

b) Démontrer que $EDCF$ est un rectangle (on pourra utiliser le paragraphe du cours concernant l'orthogonalité).

Déterminer les intersections des plans :

c) (EFC) et (GDA)

d) (EFC) et (AIJ)

e) (EFC) et (DIJ)

f) (DIJ) et (BGE)

9

Soit $ABCD$ un tétraèdre.

Soit I un point de $[BC]$. Soit J un point de $[AD]$.

Dans chaque cas, déterminer l'intersection du plan (DIJ) avec le plan :

a) (BCD)

b) (ABC)

c) (ABD)

10

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède (rectangle si l'on veut).

Soit I un point du segment $[DC]$ (distinct de D).

a) Démontrer que (AD) est parallèle à (FG).

b) Démontrer que A, D, G et F sont coplanaires.

c) Démontrer que A, I, G et F ne sont pas coplanaires.

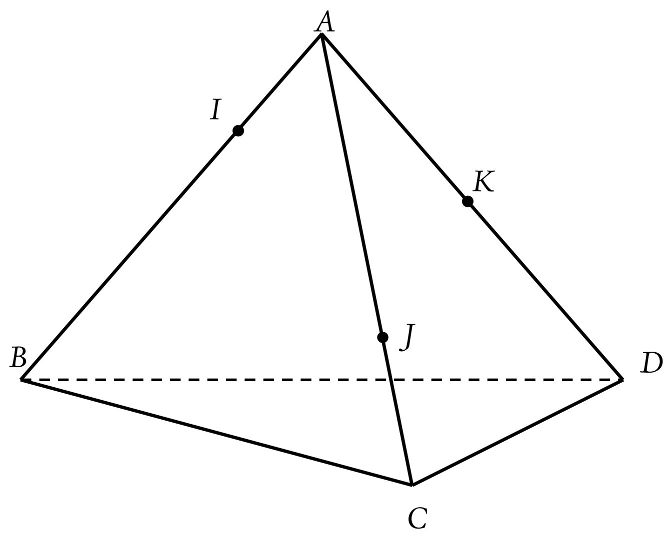
d) En déduire que (IF) et (AG) ne sont pas sécantes.

CONSTRUCTIONS

Dans les exercices de ce chapitre, lorsqu'une figure est représentée dans l'énoncé et qu'une construction est demandée, on pourra réaliser la construction directement sur la figure de l'énoncé. Si la construction déborde, on collera d'abord la figure sur une feuille blanche plus large.

Les constructions seront faites de préférence à la règle non graduée seule.

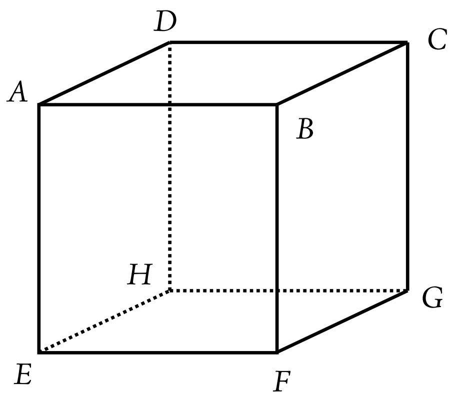
11



a) Construire U, V et W, points d'intersection respectifs de (IK), (IJ) et (KJ) avec le plan (BCD).

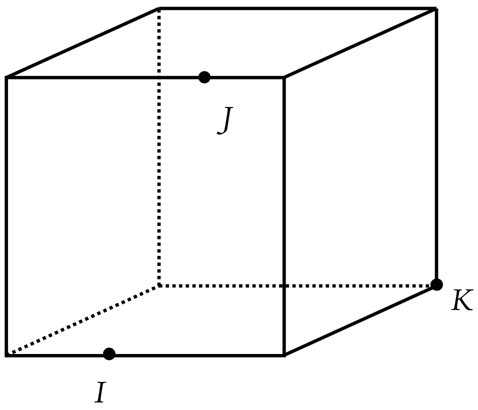
b) Démontrer que U, V et W sont alignés.

12

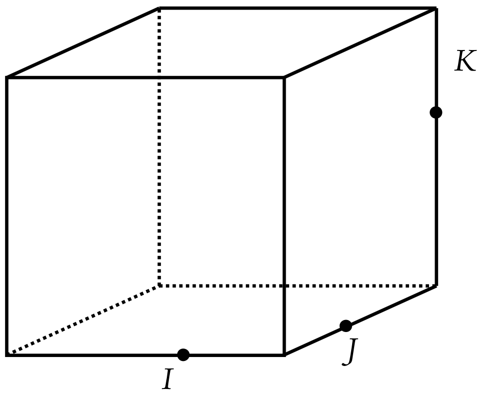


Soit $ABCDEFGH$ un cube. Notons $\mathcal{C}$ ce cube (en tant que surface). On place trois points I, J et K sur des arêtes de ce cube. Construire dans chaque cas l'intersection de $\mathcal{C}$ avec le plan (IJK).

a)



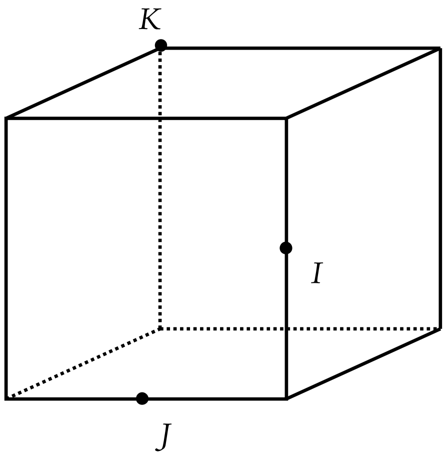
b)



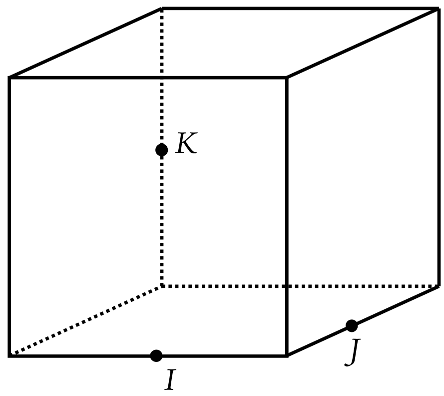
13

Même exercice que le précédent, avec les figures suivantes.

a)

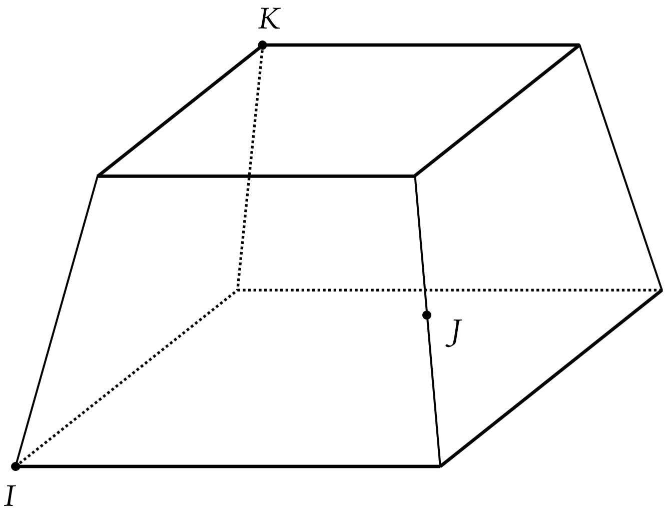


b)



14

Construire l'intersection de l'hexaèdre avec (IJK).



15

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Soit I un point de $[AB]$. Soit J un point de la face ACD. Construire le point d'intersection de (IJ) avec (BCD).

16

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Soit I un point de la face ABC. Soit J un point de la face ACD. Construire le point d'intersection de (IJ) avec (BCD).

MESURES

17

Déterminer la mesure de la diagonale d'un cube d'arête 1. (Peu importe l'unité de longueur choisie.)

18

Déterminer une valeur approchée à deux décimales de la mesure en degré de l'angle entre de la diagonale d'un cube et l'une des arêtes adjacentes.

19

Soit un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Quelle est la mesure du plus court trajet de A à G parcouru à la surface du cube ?

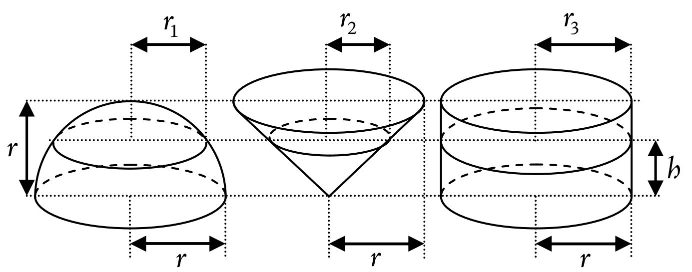
20

Déterminer le volume d'un tétraèdre régulier d'arête 1.

21

Un cône de révolution, une demi boule et un cylindre de révolution ont tous trois pour base un disque de rayon r et ont aussi une hauteur égale à r. Ils sont 'posés' sur un même plan, que nous appellerons le 'sol', le cône étant sur sa pointe, comme indiqué sur la figure. On note leurs volumes respectifs : V_1 , V_2 et V_3.

Un plan parallèle au 'sol' et situé à une 'hauteur' h, coupe ces trois solides en trois cercles de rayons respectifs r_1 , r_2 et r_3 . On note A_1 , A_2 et A_3 les aires respectives de ces cercles.



a) Exprimer r_1 , r_2 et r_3 en fonction de h.

b) Exprimer A_1 , A_2 et A_3 en fonction de h.

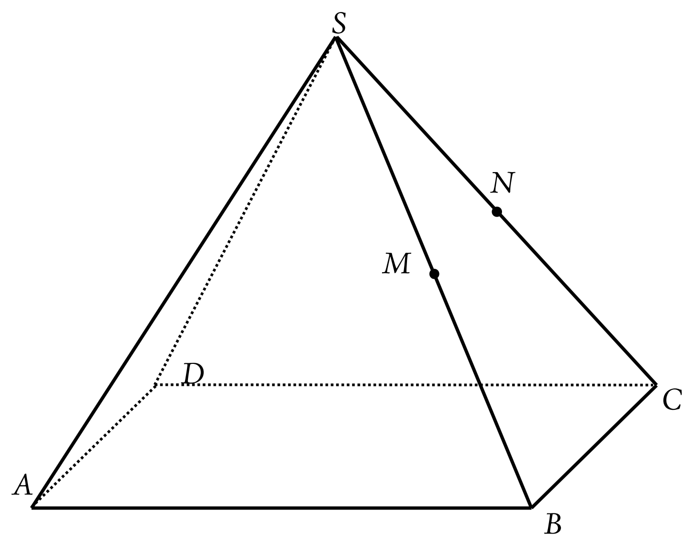
c) Démontrer que $A_1 = A_3 - A_2$.

d) Nous admettrons ici le *principe de Cavalieri*, qui dit que « <u>si</u> les sections de deux solides par tous les plans parallèles à un plan donné ont même aire <u>alors</u> ces solides ont même volume ». Il en vient donc que $V_1 = V_3 - V_2$.
Déduire de cela une formule donnant le volume d'une sphère en fonction de son rayon, connaissant les formules donnant le volume d'un cylindre et d'un cône.

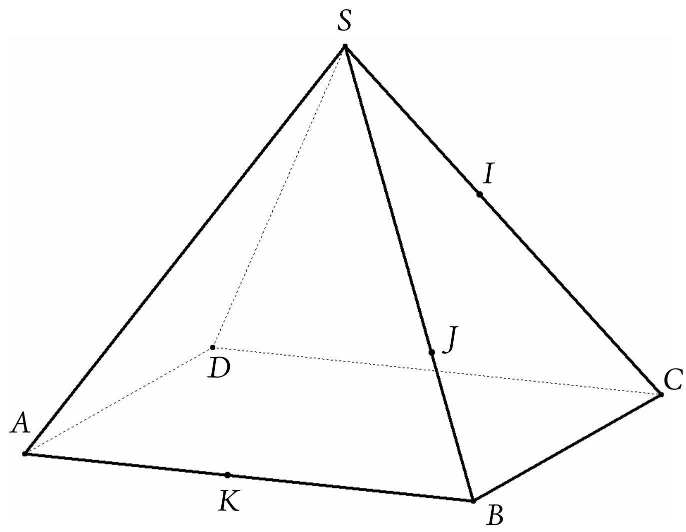
22

Soit $SABCD$ une pyramide de sommet S à base carrée et dont toutes les arêtes ont même longueur (cette dernière condition n'est utile que pour la dernière question).

a) Soit M le milieu de $[SB]$ et N le milieu de $[SC]$.
Démontrer que (AD) est parallèle à (MN), puis que (AM) et (DN) sont sécantes. On notera U leur point d'intersection. Démontrer ensuite que $(SAB)\cap(SDC) = (SU)$.



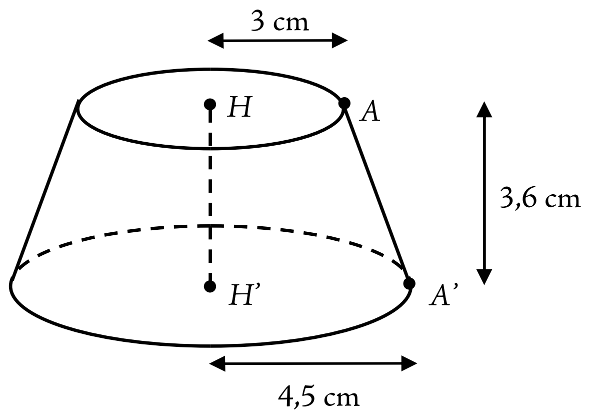
b) Ci-dessous, on a représenté la pyramide $SABCD$ et l'on a placé trois points I, J et K appartenant respectivement à $[SC]$, $[SB]$ et $[AB]$. Construire directement sur la figure l'intersection du plan (IJK) avec la pyramide $SABCD$.



c) Quel est le volume de $SABCD$ si l'on prend pour unité de longueur une arête de la pyramide (et, bien entendu, pour unité de volume le cube de cette longueur) ? *Dans cette question, seule la réponse finale est demandée.*

23

Considérons une portion d'un cône de révolution délimitée par deux disques (orthogonaux à la hauteur du cône) de rayons 4,5 cm et 3 cm et dont la hauteur est de 3,6 cm :



Déterminer le volume V de ce solide et construire son patron.

24

Construire le patron d'un cône de révolution de hauteur 10cm et dont le disque de base a pour rayon 3cm.